УДК 514.853

В. О. Соловьев

Космология как задача классической механики

Уравнения эволюции Вселенной, открытые А. Фридманом в 1922 году, могут быть интерпретированы как уравнения радиального движения материальной точки в центральном поле двух потенциальных сил: силы всемирного притяжения Ньютона и силы всемирного отталкивания (анти)Гука. Элементарность такой постановки космологической задачи позволяет рассматривать ее уже в курсе общей физики, не требуя знакомства студентов с общей теорией относительности (ОТО). На том же уровне могут обсуждаться космологические следствия простых обобщений ОТО, таких как массивная гравитация.

Ключевые слова: общая теория относительности, космология, преподавание физики, законы Ньютона, массивная гравитация.

Об авторах

Соловьев Владимир Олегович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и естественных наук филиала «Протвино» Государственного университета «Дубна»; старший научный сотрудник отдела теоретической физики ФГБУ «Государственный научный центр Российской Федерации – Институт физики высоких энергий» Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт». *E-mail: vosoloviev@gmail.com.* 142281, г. Протвино, Северный проезд, д. 9. Государственный университет «Дубна» филиал «Протвино».

Курс общей физики предназначен дать студенту понимание явлений окружающего мира от элементарных частиц до Вселенной в целом. При этом не требуется знакомить учащихся с основными теориями современной физики детально. Даже такие устоявшиеся разделы, как механика и термодинамика, сначала преподаются студентам-физикам в кратком изложении, а более подробное остается на долю курса теоретической физики. Традиционное разделение общей физики по семестрам сложилось достаточно давно, во времена, когда космология еще не считалась точной наукой и преподавалась лишь астрономам в качестве специальной дисциплины. Однако в последние десятилетия здесь произошли большие изменения, развиты и освоены новые методы наблюдений, качественно изменившие характер этого направления. Естественным и необходимым шагом будет введение элементов космологии в курс общей физики, наравне с элементами физики элементарных частиц. Хотя общая теория относительности (ОТО), до сих пор успешно объясняющая результаты наблюдений над Вселенной, и сложна для студентов младших курсов, однако ее здесь вполне могут заменить простые механические модели. В этой работе мы намерены это продемонстрировать.

Уравнения динамики однородной и изотропной Вселенной впервые были получены Фридманом в 1922 г. [11–13; 21; 22]. В предшествовавших работах Эйнштейн [15; 20] и де Ситтер [6; 19] ограничились априорным предположением о статичности мира. Уравнения Фридмана – это два обыкновенных дифференциальных уравнения, одно из которых первого порядка, а другое – второго. Искомой функцией является радиус мира, как тогда выражались, теперь же принято называть эту величину масштабным фактором. Аргументом функции является космическое время. Нетрудно заметить, что уравнения Фридмана можно переписать так, что одно из них примет вид закона сохранения механической энергии, а другое – вид основного закона динамики Ньютона для материальной точки в поле двух потенциальных сил. Одна из сил является силой гравитационного притяжения к точечному либо сферически симметричному неподвижному телу, другая – силой отталкивания от этого тела. Зависимость этих сил от расстояния дается, соответственно, законом обратных квадратов Ньютона и законом прямой пропорциональности расстоянию Гука. Еще в

«Математических началах натуральной философии» Ньютона [7] было отмечено, что только две эти силы обладают тем замечательным свойством, что силу, созданную сферически симметричным телом можно заменить силой, созданной материальной точкой, размещенной в его центре. Итак, эволюция однородной и изотропной Вселенной подчиняется тем же уравнениям, что и радиальное движение материальной точки под действием двух потенциальных сил, происходящее по законам механики Ньютона. Разумеется, в этой механике нет места для особой роли скорости света и скорость точки ничем не ограничена. Аналогия уравнений Фридмана и уравнений классической механики обсуждалась в литературе [17; 25; 29–32].

Существует и трактовка космологии Фридмана – Хаббла на основе механики сплошных сред, также не требующая использования ОТО. Она была предложена в начале 1930-х гг. Милном [28] и затем развита им совместно с Мак-Кри [27]. Достаточно применить уравнения гидродинамики Эйлера (или интеграл Бернулли) совместно с уравнением непрерывности и в предположении о нулевом давлении, чтобы независимо от ОТО прийти к уравнениям современной космологии.

Открытое недавно явление гравитационных волн, созданных при катастрофическом сближении и слиянии двух объектов, обычно интерпретируемых как черные дыры, также, с точностью до коэффициента пропорциональности порядка единицы, качественно может быть описано без ОТО, на основе ньютоновой теории гравитации и аналогии с электродинамикой [22].

Как известно, первые предсказания черных дыр или «темных тел» были сделаны Митчелом и Лапласом еще в XVIII в. на основе теории тяготения Ньютона. Кроме того, наблюдательные студенты замечают, что строгие вычисления геодезического движения в центрально-симметричном поле, описываемом в рамках ОТО точным решением Шварцшильда, приводят к уравнению второго закона Ньютона для движения в гравитационном поле, определенном законом всемирного тяготения Ньютона.

Ниже мы подробно проиллюстрируем совпадение уравнений Фридмана с уравнениями радиального движения материальной точки в классической механике в поле двух потенциалов: гиперболического и параболического.

В своей пионерской работе [11; 13; 21], используя космологический принцип Эйнштейна, т.е. однородность и изотропию пространства и сопутствующую систему отсчета для материи, взятой в виде пыли, Фридман приходит к следующим уравнениям:

$$\frac{R'^2}{R^2} + \frac{2R''R}{R^2} + \frac{c^2}{R^2} - \lambda = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{3R'^2}{R^2} + \frac{3c^2}{R^2} - \lambda = 8\pi G\rho. \qquad (2)$$

Здесь c – скорость света; G – гравитационная постоянная Ньютона; R – «радиус мира» (сейчас принято говорить масштабный множитель); ρ – средняя плотность вещества во Вселенной; λ – космологическая постоянная, введенная Эйнштейном. Штрихи обозначают производные по времени. Если теперь представить, что $R(t)$ определяет зависимость от времени расстояния материальной точки единичной массы до силового центра, $R'(t)$ – скорость этой точки, а $R''(t)$ – ускорение, то исключив первую производную с помощью одного из уравнений, мы получим формулы для кинетической энергии и для ускорения:

$$\frac{R'^2}{2} = E - U(R), \qquad (3)$$

$$R'' = -U'(R), \qquad (4)$$

где $U(R) = -\frac{GM}{R} - \frac{\lambda R^2}{6}$, которые можно трактовать как закон сохранения механической энергии $E = -\frac{1}{2}mc^2$ и второй закон Ньютона $ma = F$ для пробной частицы единичной массы, $m = 1$. При этом в правых частях уравнений стоят потенциальные энергии и соответствующие им силы. Примечательно, что эти две потенциальные силы являются основными макроскопическими силами природы, именно они наиболее тщательным образом изучаются во всех начальных курсах механики. В «Математических началах натуральной философии» Ньютона отмечается, что только для двух этих сил траектории частицы являются коническими сечениями, и только для двух этих сил мы можем считать источники точечными и тогда, когда они на самом деле являются лишь сферически симметричными [7].

Рис. 1. Графики функций $u(x), v(x), h(x)$

На рис. 1 представлены графики зависимости безразмерных величин – потенциальной энергии $u(x) = -\frac{\beta}{3}\left(\frac{2}{x} + x^2\right)$, скорости $v(x) = \sqrt{-1 + \frac{\beta}{3}\left(\frac{2}{x} + x^2\right)}$ и постоянной Хаббла $h(x) = \sqrt{-\frac{1}{x^2} + \frac{\beta}{3}\left(\frac{2}{x^3} + 1\right)}$ – от безразмерного масштабного фактора. Точку максимума потенциальной энергии $R_1 = \sqrt[3]{\frac{3GM}{\lambda}}$ можно назвать точкой Эйнштейна. При нашем выборе переменной $x = \frac{R}{R_1}$ это точка x=1. Горизонтальная линия показывает уровень безразмерной полной энергии $e = -1$. Безразмерный параметр $\beta = \frac{R_2}{\pi R_1}$, где $R_2 = \frac{2GM}{c^2}$ – гравитационный радиус для массы материи M. График потенциальной энергии $u(x)$ в этой механической задаче показывает, что для Вселенной нет устойчивого состояния равновесия. Не заметивший этого Эйнштейн именно эту ошибку считал «главной ошибкой в своей жизни», косвенно признавшись в этом лишь в частной беседе с Георгием Гамовым [2]. Разумеется, век тому назад, когда не было известно даже о существовании других галактик, кроме Млечного Пути, а уравнения ОТО только появились на свет и ужасали всех своей сложностью, ошибка Эйнштейна была абсолютно естественной. Возможно, требовалось родиться именно в России, стране космизма Достоевского, Федорова и Циолковского, быть современником доктора Живаго, пережить три революции и гражданскую войну, быть при этом высококлассным математиком, иметь рядом кружок единомышленников, один из которых вернулся прямо из Геттингена от Гильберта, впервые нашедшего лагранжиан и уравнения ОТО, чтобы иметь право применить к себе слова Данте: «Воды, в которые я вступаю, не пересекал ещё никто» [1; 9]. Отказавшись повторять ошибку Эйнштейна («фактически, деление на ноль» [23]), Александр Фридман получил уравнения, равнозначные для космологии законам механики Ньютона [5; 8; 17; 29–32].

В зависимости от предположения о кривизне пространства, которая с точки зрения математики может быть и положительной, и нулевой, и отрицательной, от средней плотности негравитационной энергии и от величины космологической постоянной, судьба Вселенной может быть различной. Уже в работах Фридмана все возможные случаи были разобраны [11–13; 21; 22]. А вскоре стали понемногу прибывать данные от астрономов. Первыми из них были наблюдения красного смещения удаленных галактик, т.е. свидетельство, что Вселенная расширяется. За сто лет астрономия прошла огромный путь, и теперь известно, что главные вклады в правую часть уравнения (3) дают космологическая постоянная (или «темная энергия») – 70% и материя с уравнением состояния пыли – 30%. С определенной точностью известна также «постоянная Хаббла» $H = \frac{R'}{R}$, стоящая в левой части уравнения (2). В механической задаче это значит, что мы знаем (приближенно) кинетическую энергию моделирующей Вселенную частицы и пропорцию между вкладами двух ее потенциальных энергий. Поскольку из формулы для $u(x)$ нам также известно, как эти потенциальные энергии зависят от безразмерного масштабного фактора, мы можем приближенно определить его значение для нынешнего этапа эволюции Вселенной. Если значение $x = 1$ соответствует максимуму потенциальной энергии, т.е. точке неустойчивого равновесия, то современное значение оказывается $x \approx 1{,}7$. Это значит, что точка минимума кинетической энергии пройдена и частица движется (а Вселенная расширяется) с ускорением. Далее по значению кинетической энергии можно получить ограничение на величину общего числового множителя, стоящего перед потенциальной энергией. Эта оценка показывает, что независимо от того, какова на самом деле кривизна пространства, кинетическая энергия расширения Вселенной даже в точке ее минимума намного превосходила модуль ее полной энергии. В связи с этим сейчас принято предполагать, что пространство попросту не имеет кривизны, т.е. является плоским (евклидовым). Из многих сценариев эволюции Вселенной, разобранных в 1922–24 гг. Фридманом [11–13; 21; 22], сейчас предпочтение отдается одному – сценарию неограниченного расширения («монотонный мир первого рода» у Фридмана).

Разумеется, все вышесказанное верно при условии, что верна ОТО и что в эволюцию Вселенной не вносит существенный вклад неизвестная материя с необычным уравнением состояния, оба этих предположения являются гипотетическими. Например, ниже мы рассмотрим одну из альтернативных теорий гравитации [3], в которой предполагается существование второй метрики пространства-времени и наличие массы у гравитона, т.е. огромный, но конечный радиус действия гравитационной силы.

И конечно, космология однородной и изотропной Вселенной является лишь первым приближением к реальному миру. Вокруг себя мы видим весьма неоднородный и сложно организованный мир. Современная космология рассматривает задачу его рождения из вакуума, грубо говоря, «из ничего», причем о возможности научной постановки такой задачи знал и думал уже Фридман («является возможность также говорить о “сотворении мира из ничего”» [14]). Огромное значение для реальной космологии имеют точные измерения фона реликтового излучения, производимые со спутников. В будущем планируются аналогичные измерения фона первичных гравитационных волн и их влияния на поляризацию фона волн электромагнитных.

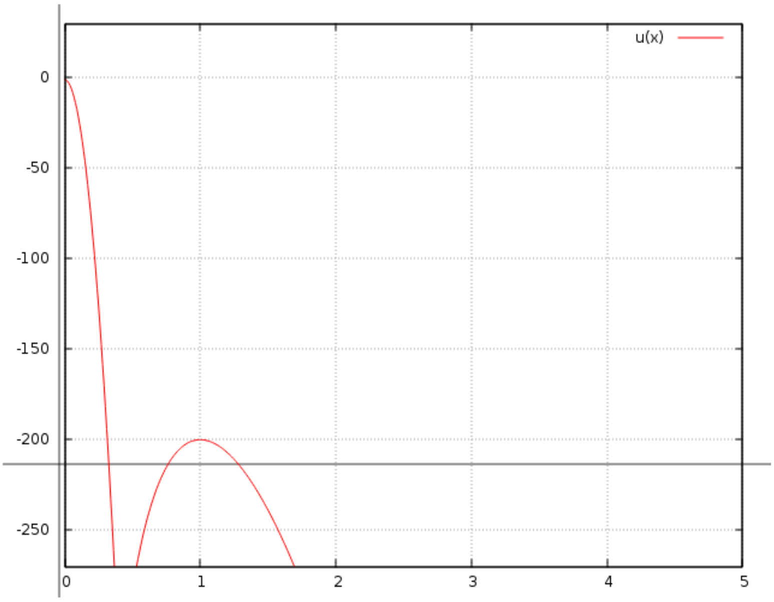

Рис. 2. Примерный график безразмерной потенциальной энергии $u(x)$ в теории инфляции, соответствующий «рождению мира из ничего»

Для очень малых значений масштабного фактора в потенциальной энергии доминирует вклад параболы с огромным по модулю отрицательным коэффициентом. В конце эпохи инфляции этот вклад сменяет гиперболическое поведение, соответствующее рождению материи, сначала с уравнением состояния излучения, где $u = \frac{a}{x^2}$, потом с уравнением состояния пыли, где $u = \frac{b}{x}$. Намного позже становится существенным вклад параболы с небольшим отрицательным коэффициентом («темная энергия»).

Если, оставаясь в рамках классической физики, записать уравнение Эйлера для однородного распределения идеальной жидкости, частицы которой движутся радиально, взаимодействуют друг с другом по закону всемирного тяготения и подвержены силе отталкивания анти-Гука,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{4}{3}\pi G\rho r + \frac{\lambda}{3}r,$$

то, применяя уравнение непрерывности,

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v) = 0,$$

можно получить закон Хаббла $v = rF(t)$.

Эйлерова скорость жидкости направлена радиально, она зависит от радиальной координаты и от времени. Лагранжева координата любой частицы жидкости определяется формулой $r = fR(t)$, где $R(t)$ – единая для всех частиц функция времени. При этом плотность жидкости меняется по закону $\rho(t) = \frac{B}{R^3}$, где B – постоянная. Уравнение для переменной $R(t)$, естественно, будет механическим уравнением

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{GM}{R^2} + \lambda R,$$

а его интеграл движения имеет вид

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{GM}{R} + \frac{\lambda R^2}{2} + K,$$

где K – постоянная; $M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$. Итак, и здесь мы снова пришли к уравнениям Фридмана для «радиуса мира» $R(t)$.

Обратимся теперь к иной теории гравитации, где сила тяжести имеет конечный, хотя и огромный радиус действия, где также реально существует не только искривленное пространство-время, но и плоское. Такая теория была предложена в работах А.А. Логунова с соавторами [3]. Ее лагранжиан включает в себя, кроме члена со скалярной кривизной, предложенного Гильбертом и являющимся лагранжианом гравитационного поля в ОТО, кроме вклада негравитационных полей, обеспечивающего их минимальное взаимодействие с метрикой $g_{\mu\nu}$, также дополнительный вклад

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{m^2}{16\pi G}\left[\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}f_{\mu\nu} - 1\right) - \sqrt{-f}\right], \quad (5)$$

причем m – это масса гравитона, а $f_{\mu\nu}$ – метрика плоского пространства-времени. Теории с двумя метриками называются биметрическими. Еще сильнее все изменится, если и вторая метрика станет динамической, и к лагранжиану добавится построенная на ее основе вторая скалярная кривизна. В последнем случае теория называется бигравитацией [10].

Космологический принцип Эйнштейна говорит, что Вселенная должна быть однородной и изотропной. Допустив это, можно и в биметрической космологии принять, что метрика динамического пространства, определяемая по тензору $g_{\mu\nu}$, определяется функцией времени $R(t)$, а метрика статического, определяемая из $f_{\mu\nu}$, имеет фиксированный масштаб R_0. Тогда

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{m^2}{16\pi G}\left[NuR^3\left(\frac{1}{2u^2} + \frac{3{R_0}^2}{R^2} - 1\right) - N{R_0}^3\right],$$

где интервалы собственного времени в двух метриках даются соответственно формулами

$$(ds_g)^2 = -N^2u^2dt^2, \quad (ds_f)^2 = -N^2dt^2.$$

Произвол в выборе нединамических переменных N, u приводит к возникновению двух уравнений типа Фридмана, содержащих R'^2. Исключив из них лишнюю переменную u, мы получим уравнение, которое, как и в случае ОТО, допускает механическую интерпретацию

$$\frac{R'^2}{2} + U(R) = 0,$$

причем $U(R) = -\frac{GM}{R} + \frac{m^2}{2}\left(R^2 + \frac{{R_0}^6}{2R^4}\right)$.

Значение полной энергии частицы здесь оказывается нулевым, а потенциальная энергия, в отличие от случая ОТО, имеет минимум, а не максимум. Поэтому для этой теории масштабный фактор оказывается ограниченным как сверху, так и снизу, и сценарий эволюции Вселенной оказывается периодическим, какое бы малое значение не принимала масса гравитона. Правда, для согласия с современными данными по ускоренному расширению, теория требует введения материи с необычным уравнением состояния, т.н. квинтэссенции. Кроме того, принято считать, что в теории с потенциалом (5) неизбежно возникают духи Бульвара – Дезера [16], избежать их появления можно лишь при использовании потенциала де Рам – Габададзе – Толи [18]. В последнем случае для описания космологии недостаточно ввести массу гравитона, оказывается необходимым переход к бигравитации [10].

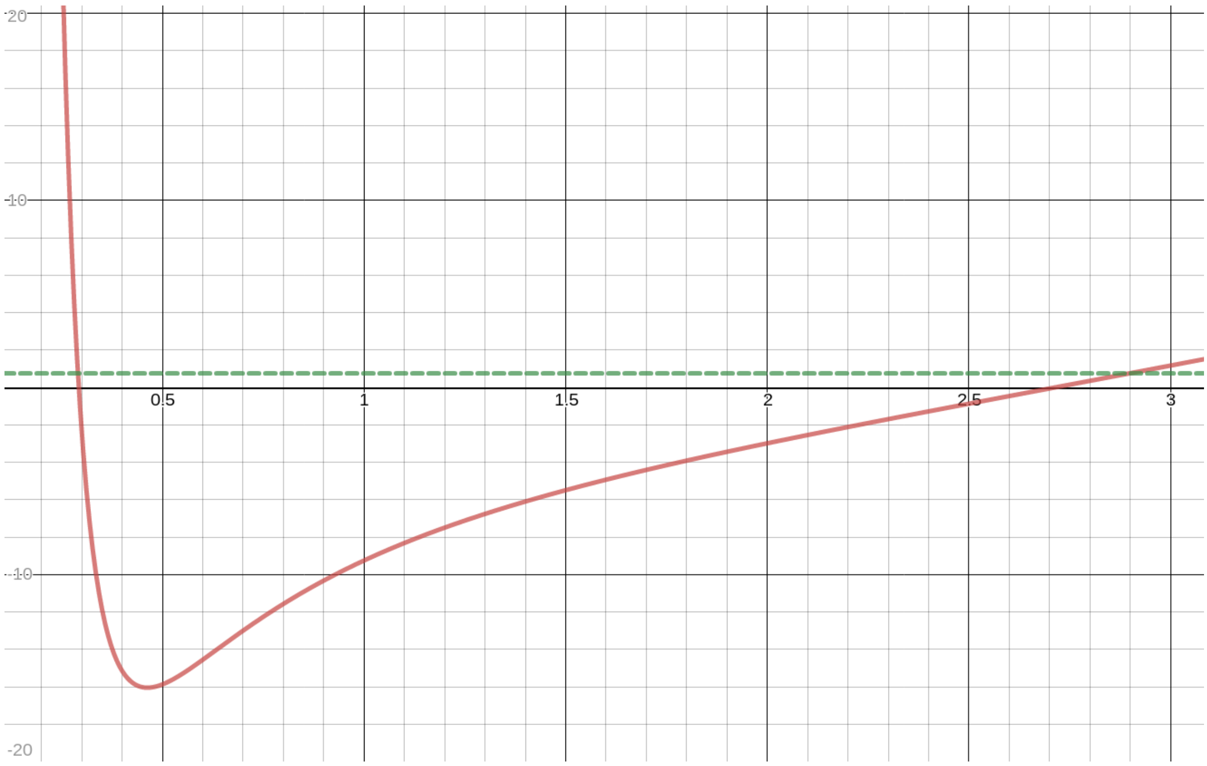

Рис. 3. Примерный график зависимости безразмерной потенциальной энергии $u(x)$ в теории Логунова

По мнению автора, знакомить с элементами современной космологии можно всех, кто усвоил механику Ньютона, это не потребует от студентов знания ОТО. Моделирование космологии с помощью классической механики помогает анализировать качественную картину эволюции Вселенной, причем не только в ОТО, но и в альтернативных теориях гравитации.

Библиографический список

1. Беленький А. «Воды, в которые я вступаю, не пересекал еще никто» Александр Фридман и истоки современной космологии // Электронный журнал «Наука из первых рук». 2012. Декабрь, № 5(47). URL: https://scfh.ru/journal/2012/skolko-stsenariev-u-vselennoy/. Режим доступа свободный (дата обращения 26.12.2016).

2. Гамов Г. Моя мировая линия: неформальная автобиография. М.: Наука, 1994.

3. Герштейн С.С., Логунов А.А., Мествиришвили М.А. Верхний предел массы гравитона // ДАН. 1998. Т. 360, вып. 3. С. 332–334.

4. Гильберт Д. Об основаниях физики // Альберт Эйнштейн и теория гравитации. К 100-летию со дня рождения: сб. ст. М.: Мир, 1979.

5. Дворянинов С.В., Соловьев В.О. Космология Фридмана: горы реальные и потенциальные // Квант. 2016. № 5–6; Cornell University Library e-print arxiv:1607.03402. URL: http://arxiv.org/1607.03402. Режим доступа свободный (дата обращения: 26.12.2016).

6. Де Ситтер В. О теории тяготения Эйнштейна и ее следствиях для астрономии. Статья III // Альберт Эйнштейн и теория гравитации. К 100-летию со дня рождения: сб. ст. М.: Мир, 1979. С. 299–318.

7. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. Классики науки. М.: Наука, 1989.

8. Соловьев В.О. Уравнение Фридмана: вчера, сегодня, завтра // Вестник Международного университета природы, общества и человека «Дубна». 2016. № 1 (33). С. 38–41.

9. Соловьев В.О. Как Фридман Эйнштейна подковал // Наукоград. 2015. № 4. С. 29–35.

10. Соловьев В.О. Гамильтонова космология бигравитации // ЭЧАЯ. 2017. Т. 80, вып. 2. Cornell University Library e-print arxiv:1505.00840. URL: http://arxiv.org/abs/1505.00840. Режим доступа свободный (дата обращения 26.12.2016).

11. Фридман А.А. О кривизне пространства // УФН. 1963. Т. 80, вып. 3. С. 439–446. URL: http://ufn.ru/ru/articles/1963/7/. Режим доступа свободный (дата обращения 26.12.2016).

12. Фридман А.А. О возможности мира с постоянной отрицательной кривизной пространства // УФН. 1963. Т. 80, вып. 3. С. 447–452. URL: http://ufn.ru/ru/articles/1963/7/. Режим доступа свободный (дата обращения: 26.12.2016).

13. Фридман А.А. Собрание трудов. М.: Наука, 1966.

14. Фридман А. Мир как пространство и время. М.: Либроком, 2009. С. 114.

15. Эйнштейн А. Вопросы космологии и общая теория относительности // Собрание научных трудов. Т. 1. М.: Наука, 1965. С. 601–612.

16. Boulware D., Deser S. Can gravitation have a finite range? // Phys. Rev. D. 1972. V. 6, Iss. 12. P. 3368–3382.

17. Caldler L., Lahav O. Dark energy: back to Newton? // Astronomy and Geophysics. 2008. V. 49, Iss. 1. P. 1–14.

18. De Rham C., Gabadadze G., Tolley A.J. Resummation of massive gravity // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 106. P. 231101.

19. De Sitter W. On Einstein’s Theory of Gravitation, and its Astronomical Consequences, Third Paper // Monthley Notices Roy. Astron. Soc. 1917. V. 78, Iss. 1. P. 3.

20. Einstein A. Kosmologiche Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie Sitzungsber // D. Berl. Akad. 1917. Hf. 1. P. 142.

21. Friedmann A. Über die Krümmung des Raumes // Z. Phys. 1922. V. 10, Iss. 1. P. 377–386.

22. Friedmann A. Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes // Z. Phys. V. 21, Iss. 1. P. 326–332.

23. Gamow G. The Creation of the Universe. New York: The Viking Press, 1952.

24. Hilbert D. Die Grundlagen der Physik // Nachrichten K. Gessellschaft Wiss. Gőttingen, Math-Phys. Klasse, 1915. Heft 3. P. 395.

25. Lima J.A.S., Moreira J.A.M., Santos J. Particle-like description for FRW cosmologies // Gen. Relat. Grav. 1998. V. 30, Iss. 3. P. 425–434.

26. Mathur H., Brown K., Lowenstein A. An analysis of the LIGO discovery based on Introductory Physics // Cornell University Library e-print arxiv:1609.09349. URL: http://arxiv.org/1609.09349. Режим доступа свободный (дата обращения 26.12.2016).

27. McCREA W.H., Milne E.A. Newtonian universes and the curvature of space // The Quarterly Journal of Mathematics. 1934. V. 5, Iss. 1. P. 73–80.

28. Milne E.A. A Newtonian expanding universe // The Quarterly Journal of Mathematics. 1934. V. 5, Iss. 1. P. 64–72.

29. Mörtsell E. Cosmological histories from the Friedmann equation: the universe as a particle // Eur. J. Phys. 2016. V. 37. P. 055603.

30. Pereira J.A.M. Earth's gravity and the cosmological constant: a worked example // Eur. J. Phys. 2016. V. 37. P. 025602 (13 p.).

31. Sonego S., Talamini V. Qualitive study of perfect-fluid Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker models with a cosmological constant // Amer. J. Phys. 2012. V. 80. P. 670–679.

32. Szydłowski M., Hrycyna O. Dissipative or conservative cosmology with dark energy? // Ann. Phys. 2007. V. 322. P. 2745–2775.

Поступила в редакцию
28.10.2016