

УДК 538.945

**И. Р. Рахмонов, Ю. М. Шукринов, К. М. Родин****Моделирование вольт-амперной характеристики кольцевой системы параллельных джозефсоновских переходов**

На основе метода компьютерного моделирования фазовой динамики кольцевой системы параллельных джозефсоновских переходов рассчитаны вольт-амперная характеристика и временные зависимости напряжения при различных значениях базового тока. Приведено подробное описание методики вычисления вольт-амперной характеристики рассматриваемой системы. Показано, что на вольт-амперной характеристике кольцевой системы имеется дополнительная ветвь, которая связана с резонансом пульсирующего флюксона и плазменной волны.

*Ключевые слова:* эффект Джозефсона, джозефсоновские переходы, флюксон, модель Френкеля – Конторовой, вольт-амперная характеристика, ступеньки нулевого поля.

**Об авторах**

**Рахмонов Илхом Рауфович** – старший научный сотрудник Объединенного института ядерных исследований. *E-mail:* rahmonov@theor.jinr.ru. 141981 Московская область, г. Дубна ул. Университетская, 19.

**Шукринов Юрий Маджнунович** – ведущий научный сотрудник Объединенного института ядерных исследований.

**Родин Кирилл Максимович** – студент 1-го курса магистратуры кафедры нанотехнологий и новых материалов государственного университета «Дубна».

Кольцевая система джозефсоновских переходов (ДП) является одним из интереснейших объектов сверхпроводниковой электроники [1; 3–7; 9–12]. В этой системе наблюдается два типа возбуждений, а именно, нелинейные возбуждения в виде кинк-солитона (флюксона) вдоль системы и плазменные колебания в ДП, которые являются линейными [7; 11]. Хранение и управление флюксонами в длинных ДП [1] лежит в основе создания новых типов элементов логики [4]. Недавно были предложены новые семейства малодиссипативных логик, основанные на флюксоне как носителе бита информации [3; 6; 9; 10; 12]. Одно из новых логических семейств [10] основывается на использовании движущего флюксона вдоль одномерного массива, в котором джозефсоновские переходы сильно связаны индуктивностью вдоль направления движения флюксона. В работе [5] авторы показали, что для данного типа массива в режиме сильной связи существует устойчивое распространение флюксона в широком диапазоне базового тока. В этой работе также экспериментально подтверждаются результаты моделирования сложной динамики  $2\pi$ -кинков в

модели Френкеля – Конторовой [2; 7; 8; 10; 11; 13]. Отметим важное обстоятельство, которое заключается в том, что динамические состояния системы проявляются на ее вольт-амперной характеристике (ВАХ). В работах [7; 11] продемонстрировано, что резонансы вращения флюксона в кольцевой системе ДП с плазменными колебаниями проявляются в виде ветвей на вольт-амперной характеристике системы. При определенных значениях параметров модели на ВАХ кольцевой системы образуется дополнительная ветвь [11], возникновение которой нельзя рассматривать как результат резонанса флюксона и плазменной волны.

В настоящей работе представлены результаты исследования причины образования данной ветви. Нами приведено подробное описание методики вычисления ВАХ, основанное на численном моделировании фазовой динамики кольцевой системы параллельных ДП. Рассчитаны ВАХ и временные зависимости напряжения при различных значениях базового тока. Проведен подробный анализ структуры ВАХ кольцевой системы ДП.

**Теоретическая модель**

Рассмотрим кольцевую систему  $N$  параллельно соединенных джозефсоновских переходов, схематический вид которой показан на рис. 1.

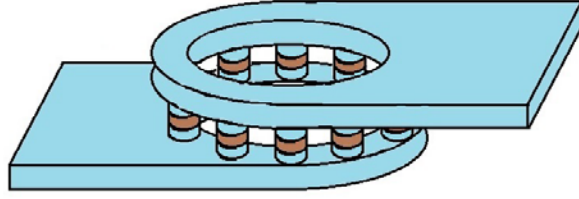


Рис. 1. Схематический вид кольцевой системы параллельных джозефсоновских переходов. Сверхпроводящие электроды обозначены светлым тоном, а возникающие ДП – более темным

Как было отмечено во введении, основной задачей настоящей работы является вычисление ВАХ данной системы, когда через нее пропускается ток  $I$ . Физические характеристики отдельного короткого джозефсоновского перехода описываются в рамках резистивной модели. Коротким считается такой ДП, геометрический размер которого мал по сравнению с джозефсоновской глубиной проникновения  $\lambda_J$ . Согласно резистивной модели Мак-Камбера – Стюарта [6; 12] отдельный джозефсоновский переход рассматривается как параллельно соединенные емкость, сопротивление и сверхпроводник. В этом случае полный ток через систему определяется как сумма токов: сверхпроводящего  $I_s$ , квазичастичного  $I_{qp}$  и тока смещения  $I_d$

$$I = I_s + I_{qp} + I_d = I_c \sin \varphi + \frac{V}{R} + C \frac{dV}{dt}, \quad (1)$$

где  $C$  – емкость ДП;  $R$  – его сопротивление;  $\varphi$  и  $V$  – разность фаз и напряжение в джозефсоновском переходе соответственно.

Напряжение в ДП задается соотношением Джозефсона

$$V = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2)$$

С учетом (2) выражение для тока (1) принимает вид

$$\frac{\hbar C}{2e} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi}{dt} + I_c \sin \varphi = I. \quad (3)$$

В случае длинного джозефсоновского перехода, когда геометрические размеры ДП больше чем  $\lambda_J$ , необходимо учитывать также поверхностный ток вдоль сверхпроводящего слоя, который определяется производной второго порядка от разности фаз

$$I_{surf} = \frac{S}{\mu_0 D} \frac{\hbar}{2e} \frac{d^2\varphi}{dx^2} = I_c \lambda_J^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2}, \quad (4)$$

где  $\lambda_J = \sqrt{\hbar S / (2e \mu_0 D I_c)}$  – джозефсоновская глубина проникновения;  $D = 2\lambda_L + d$  – эффективная магнитная толщина;  $\lambda_L$  – лондоновская глубина проникновения;  $d$  – толщина диэлектрического

слоя;  $S$  – площадь сверхпроводящего слоя;  $\mu_0$  – магнитная постоянная. С учетом (4) выражение для полного тока через длинный ДП записывается в следующем виде

$$\frac{\hbar C}{2e} \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{S}{\mu_0 D} \frac{\hbar}{2e} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi}{dt} + I_c \sin \varphi = I. \quad (5)$$

Нормируя время на обратную плазменную частоту  $\omega_p = \sqrt{2eI_c / \hbar C}$ , координату на  $\lambda_J$  и базовый ток  $I$  на критический ток ДП  $I_c$ , можно переписать уравнение (5) в безразмерной форме

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \alpha \frac{d\varphi}{dt} + \sin \varphi = I, \quad (6)$$

где  $\alpha = \sqrt{\hbar / 2eI_c R^2 C}$  – параметр диссипации.

Таким образом, фазовая динамика длинного ДП описывается возмущенным уравнением синус-Городона (СГ). Модель, основанная на уравнении СГ, представляет собой одну из наиболее фундаментальных нелинейных моделей, которая позволяет описывать различные возбуждения в системе, в частности кинки (флюксоны) и бризеры (динамические солитоны) и их взаимодействие. Отметим, что кольцевую систему параллельных ДП можно рассматривать в качестве дискретизированного длинного ДП. При переходе от непрерывного уравнения СГ к дискретному мы получим модельное уравнение Френкеля – Конторовой (ФК), которое описывает кольцевую систему параллельных ДП [7]:

$$\frac{\varphi_{n-1} - 2\varphi_n + \varphi_{n+1}}{a^2} - \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t^2} = \sin \varphi_n + \alpha \frac{d\varphi_n}{dt} - I, \quad (7)$$

где  $\varphi_n$  – разность фаз на  $n$ -м ДП;  $a = \sqrt{2eL_0I_c/\hbar}$  – расстояние между ДП в системе (параметр дискретности), нормированное на  $\lambda_J$ ;  $L_0$  – геометрическая индуктивность одной ячейки. Здесь  $n$  изменяется в интервале  $1 \leq n \leq N$ , где  $N$  – количество ДП в системе. Связь между ближайшими переходами характеризуется константой связи  $1/a^2$ . Чем больше шаг решетки, т.е. дискретный параметр  $a$ , тем слабее связь между отдельными переходами.

### Методика расчета ВАХ

Для вычисления ВАХ необходимо решить численно дифференциальное уравнение (7). Перепишем это уравнение в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dV_n}{dt} = \frac{\varphi_{n+1} - 2\varphi_n + \varphi_{n-1}}{a^2} - \sin \varphi_n - \alpha \frac{d\varphi_n}{dt} + I \\ \frac{d\varphi_n}{dt} = V_n \end{cases} \quad (8)$$

Для решения системы уравнений (8) используется метод Рунге – Кутта четвертого порядка [14]. Этот метод хорошо себя зарекомендовал при исследовании длинных джозефсоновских переходов.

Алгоритм расчета ВАХ состоит из нескольких этапов. Вначале задаются значение базового тока  $I = I_0$  и начальные условия  $\varphi_n(t)|_{t=0} = 0$  и  $V_n(t)|_{t=0} = 0$ . Затем, при заданном фиксированном значении тока, система уравнений (8) решается численно методом Рунге – Кутта четвертого порядка в интервале времени  $[0, T_{\max}]$  с шагом  $\Delta t$ , и, как результат, определяется разность фаз  $\varphi_n(t)$  и  $V_n(t)$  как функции времени. Далее, необходимо вычислить среднее значение напряжения для заданного тока. Среднее значение напряжения вычисляется с использованием выражения

$$\langle V_n \rangle = \frac{1}{T_{\max} - T_i} \int_{T_i}^{T_{\max}} V_n(t) dt \quad (9)$$

Здесь вычисление интеграла напряжения проводится с использованием метода прямоугольников. Усредненное значение напряжения вычисляется по формуле  $\langle V \rangle = \sum_{n=1}^N \langle V_n \rangle / N$ .

Таким образом, мы находим соответствующее значение напряжения для заданного значения тока. Далее ток увеличивается на  $\Delta I$ , и вышеописанная процедура вычисления повторяется. Отметим, что полученные при  $I$  значения  $\varphi_n(T_{\max})$  и  $V_n(T_{\max})$  используются в качестве начальных условий при  $I + \Delta I$ . Для уравнения (8) задаются периодические граничные условия. В этом случае пространственные точки  $n = 0$  и  $n = N + 1$  считаются эквивалентными  $n = N$  и  $n = 1$  соответственно. Следовательно,  $\varphi_0 = \varphi_N - 2\pi M$  и  $\varphi_{N+1} = \varphi_1 - 2\pi M$ , где  $M$  – количество флюксонов, введенное в систему. При проведении расчетов нами рассматривается

простейший случай с одним введенным флюксоном, т.е.  $M = 1$ .

### Основные результаты

Обсудим вначале особенности вольт-амперной характеристики кольцевой системы ДП. На рис. 2 представлена однопетлевая ВАХ, рассчитанная для кольцевой системы с  $N = 10$  ДП при значениях параметров модели  $\alpha = 0.1$ ,  $a = 1$  и  $M = 1$ . При расчете ВАХ ток увеличивался от нуля до  $I = 0.55$  и затем обратно, уменьшался до нуля.

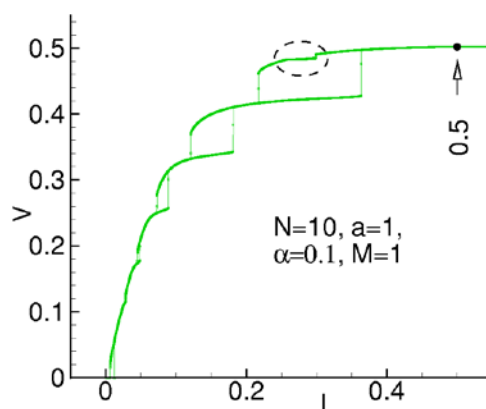


Рис. 2. Вольт-амперная характеристика кольцевой системы  $N = 10$  параллельных джозефсоновских переходов с параметром диссипации  $\alpha = 0.1$ , параметром дискретности  $a = 1$  и с одним ( $M = 1$ ) введенным флюксоном. Пунктирным эллипсом отмечена область ВАХ, где наблюдается дополнительная ветвь. Стрелка указывает значения базового тока, для которого рассчитана временная зависимость напряжения (см. рис. 3)

Как мы видим на рис. 2, ВАХ демонстрирует ветвистую структуру. При прохождении джозефсоновского перехода флюксон оставляет после себя плазменные колебания в виде «хвоста». Согласно работам [7; 11], ветвистая структура возникает вследствие резонанса между бегущим флюксоном и плазменными колебаниями на его «хвосте». Флюксон делает полный оборот по кольцу и догоняет свой «хвост», попадая в резонанс с определенным плазменным колебанием. Частоты плазменных колебаний определяются законом дисперсии плазменной волны в рассматриваемой системе:

$$\omega_m = \sqrt{1 + \frac{4}{a^2} \sin^2 \left( \frac{\pi m a}{L} \right)}, \quad (10)$$

где  $L = Na$  – длина кольцевой системы ДП;  $m$  – целое число, которое указывает количество

длин волн, укладывающихся на длине кольцевой системы. Закон дисперсии (10) можно получить, линеаризовав уравнение (7) и пренебрегая затуханием ( $\alpha = 0$ ) и внешним током ( $I = 0$ ) [11]. В соответствии с выражением (10) резонанс с номером  $m$  возникает, когда прохождение флюксона через заданную точку массива совпадает с  $m$ -м максимумом колебаний, вызванных плазменной волной, распространяющейся за флюксонном.

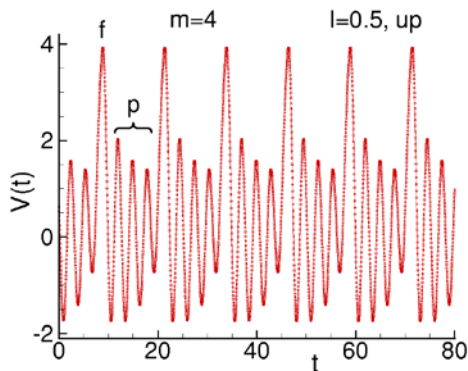


Рис. 3. Временная зависимость напряжения при  $I = 0.5$  в случае нарастания тока. Буквой  $f$  указан максимум, соответствующий прохождению флюксона через данный ДП, а буквой  $p$  указаны плазменные колебания

В этом можно убедиться, проанализировав временную зависимость напряжения для определенного значения тока, соответствующего резонансной ветви. На рис. 3 представлена временная зависимость напряжения для значения тока  $I = 0.5$ , соответствующего верхней ветви на ВАХ (это значение тока отмечено точкой на рис. 2). Напряжение демонстрирует осцилляции с периодически меняющейся амплитудой. Максимумы напряжения, отмеченные буквой  $f$ , соответствуют тому, что в данный момент времени через ДП проходит флюксон, а максимумы, отмеченные буквой  $p$ , соответствуют плазменным колебаниям. То есть флюксон достигает свой хвост через время, соответствующее четырем плазменным колебаниям, что приводит к реализации резонанса с  $m = 4$ . На ВАХ наблюдается дополнительная ветвь, отмеченная пунктирным эллипсом на рис. 2. В работах [7; 11] эта ветвь также проявлялась, но ее происхождение в этих работах не исследовалось. Увеличенная часть ВАХ в этой области представлена на рис. 4.

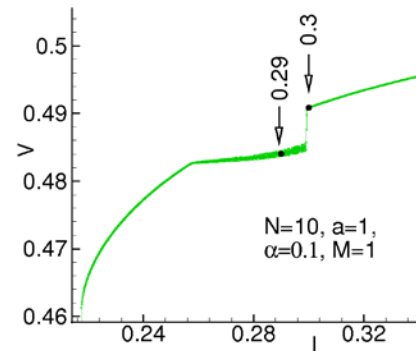


Рис. 4. Увеличенная часть ВАХ в области дополнительной ветви

Причина возникновения этой дополнительной ветви не может быть объяснена на основе выражения (10). Для её выяснения нами был проведен сравнительный анализ временных зависимостей напряжения в области дополнительной ветви и в ее окрестностях, что позволяло объяснить возникновение этой ветви. На рис. 5а представлена временная зависимость напряжения до перехода на дополнительную ветвь при значении тока  $I = 0.3$ . Как и следовало ожидать, на этой зависимости наблюдаются максимумы с фиксированным периодом, что демонстрирует резонанс с числом  $m = 4$ . Другая картина наблюдается в области дополнительной ветви ВАХ, для которой временная зависимость напряжения, рассчитанная при  $I = 0.29$ , показана на рис. 5б. Здесь также наблюдаются максимумы с фиксированным периодом. Но отличие в том, что амплитуда меняется с периодом движения флюксона, т.е. наблюдается модуляция каждого второго максимума. Таким образом, в этой области кинк-флюксон демонстрирует пульсирующее поведение.

Пульсация флюксона хорошо просматривается на рис. 6, где представлена временная эволюция пространственного распределения магнитного поля в джозефсоновских переходах, соответствующая точке ВАХ при  $I = 0.29$ , т.е. в области дополнительной ветви ВАХ. Как видно, перемещаясь по ДП системы, флюксон демонстрирует пульсацию. Стрелки указывают номера ДП, в которых происходит пульсация. Проведенный анализ показывает, что резонанс данной пульсации с плазменными колебаниями является причиной возникновения дополнительной ветви на ВАХ.

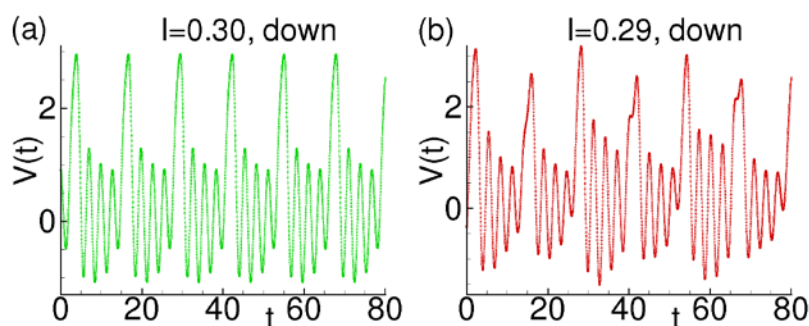


Рис. 5. Временная зависимость напряжения в режиме уменьшения внешнего тока: при (a)  $I = 0.3$ ; (b)  $I = 0.29$

$N=10, I=0.29, a=1$

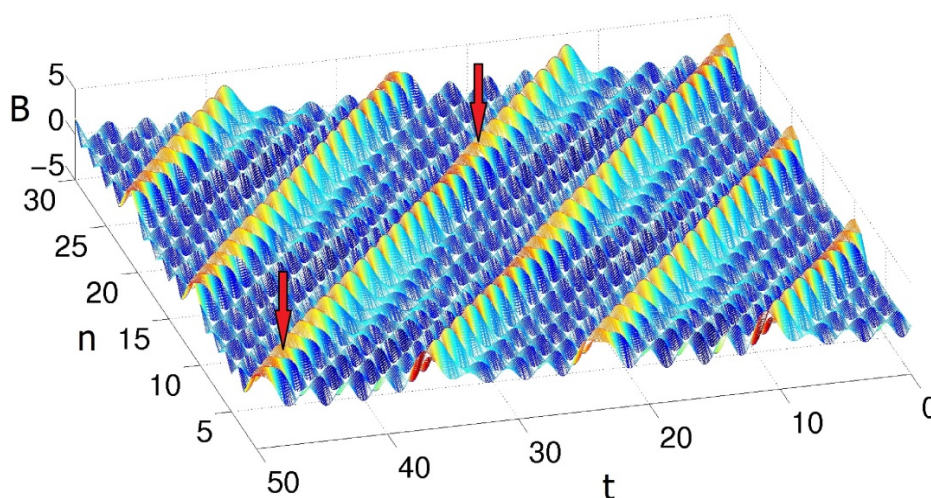


Рис. 6. Временная эволюция пространственного распределения магнитного поля в джозефсоновских переходах, соответствующая точке ВАХ при  $I = 0.29$ . Стрелки указывают момент времени и номер ДП, где наблюдается пульсация флюксона

### Заключение

В заключение отметим, что в настоящей работе рассчитана ВАХ кольцевой системы ДП и временная зависимость напряжения в отдельных ДП системы. Сравнительный анализ временных зависимостей в области дополнительной ветви и вне ее свидетельствует о пульсации кинк-флюксона в этой области. Показано, что именно резонанс пульсаций флюксона и плазменных колебаний приводит к появлению дополнительной ветви на ВАХ.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках проектов 18-02-00318, 18-32-00950 и 15-29-01217 и Объединенным институтом ядерных исследований в рамках проекта 18-302-08.*

### Библиографический список

1. Cirillo M., Appl J. Inductively coupled fluxon oscillators// Phys. 58. 1985. P. 3217–3230.
2. Cirillo M., Larsen B.H., Ustinov A.V., Merlo V., Oboznov V.A., Leoni R. On magnetic flux dynamics in 1D arrays of underdamped Josephson junctions// Phys. Lett. A 183. 1993. P. 383–389.
3. Herr Q.P., Herr A.Y., Oberg O.T., Ioannidis A.G. Ultra-low-power superconductor logic// J. Appl. Phys. 2011. V. 109. P. 1–8.
4. Likharev K.K., Semenov V.K. RSFQ logic/memory family: a new Josephson-junction technology for sub-terahertz-clock-frequency digital systems// IEEE Trans. Appl. Supercond. 1991. V. 1. P. 3–28.
5. Lucci M., Badoni D., Merlo V., Ottaviani I., Salina G., Cirillo M., Ustinov A.V., Winkler D. Experimental Study of Spectral Properties of a Frenkel-

Kontorova System. // Phys. Rev. Lett. 2015. V. 115. P. 1–5.

6. Mukhanov O.A. Energy-efficient single flux quantum technology// IEEE Trans. Appl. Supercond. 2011. V. 21. P. 760–769.

7. Pfeiffer J., Abdumalikov A.A., Schuster Jr. M., Ustinov A.V. Resonances between fluxons and plasma waves in underdamped Josephson transmission lines of stripline geometry// Phys. Rev. B 77. 2008. P. 1–6.

8. Pfeiffer J., Schuster M., Abdumalikov A.A., Ustinov A.V. Observation of Soliton Fusion in a Josephson Array// Phys. Rev. Lett. 2006. V. 96. P. 1–4.

9. Ren J., Semenov V.K. Progress with physically and logically reversible superconducting digital circuits// IEEE Trans. Appl. Supercond. 2011. V. 21. P. 780–786.

10. Semenov V.K., Danilov G.V., Averin D.V. Negative-inductance SQUID as the basic element of

reversible Josephson-junction circuits// IEEE Trans. Appl. Supercond. 2003. V. 13. P. 938–943.

11. Ustinov A.V., Cirillo M., Malomed B.A. Fluxon dynamics in one-dimensional Josephson-junction arrays// Phys. Rev. B 47. 1993. P. 8357–8360.

12. Volkman M.H., Sahu A., Fourie C.J., Mukhanov O.A. Implementation of energy efficient single flux quantum digital circuits with sub-aJ/bit operation// Supercond. Sci. Technol. 2013. V. 26. P. 28.

13. Zant H.S.J., Orlando T.P., Watanabe S., Strogatz S.H. Kink Propagation in a Highly Discrete System: Observation of Phase Locking to Linear Waves// Phys. Rev. Lett. 1995. V. 74. P. 174–177.

14. Рахронов И.Р., Шукринов Ю.М., Атанасова П.Х., Земляная Е.В., Башанин М.В. Влияние индуктивной и емкостной связи на вольт-амперную характеристику и электромагнитное излучение системы джозефсоновских переходов// ЖЭТФ. 2017. № 151. С. 151–159.

---

*Поступила в редакцию*  
26.05.2018